数理解析研究所講究録
24巻 1967年 59-76

非線形不安定性

東大 宇宙研 桑原真二

§1. はじめに

こゝでは，熱および電気伝導性のない，縮まない粘性流体 すなわち連続の方程式と Navier-Stokes の方程式で記述される流体に議論を限るものとする。 これらの方程式によって記述される力学系を Navier-Stokes 系（N-S 系）と呼ぶことにする。

一般の流体運動においては，層流と乱流というけん著な二種類の運動状態がある。 N-S 系の一例として Hagen-Poiseuille 流（H-P 流）の場合を考えよう。 圧力勾配が十分小さい場合には流れは層流である。これをエネルギーの観点から見れば，圧力勾配によって起された流れ（平均流）が内部摩擦によって散逸され，圧力勾配によって供給されるエネルギーと摩擦によって失われるエネルギーがバランスしていると考えられる。H-P 流に限らず層流の N-S 系では

エネルギー源（圧力勾配等） ⟶ 平均流（運動エネルギー） ⟶ 熱エネルギー

というエネルギー変遷の図式が成立つ。 さて，圧力勾配がもっと大きくなりある値をこえると，流れは乱流に遷移する。 この場合には，エネルギーの供給が大きすぎて，平均流によるエネルギー散逸だけではまかない

きれず，もっと小さい運動（乱流）にそれを分担させているものと考えられる。乱流状態は（平均流）＋（種渦の重り）として記述することができる。この場合，エネルギー変遷の図式は

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{エネルギー源}} \arrow[r] & \boxed{\text{平均流}} \arrow[rr] \arrow[dr, shift left] & & \boxed{\text{熱エネルギー}} \\
& & \boxed{\text{乱流（種渦）}} \arrow[ul, shift left] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

となる。一般に，平均流と乱流との間には，一方向のエネルギーの流れだけでなく，エネルギーの授受が考えられる。

乱流状態が起るためには，先ずエネルギーの供給が十分大きくなければならない。この条件は，流れを特ちょうずける Reynolds 数 R がその流れに特有な臨界 Reynolds 数 R_{cr} を超さねばならないという形で表わされる。N-S 系はどのような R についても定常解があると考えられるから，始めに流れを乱すものがなければ乱流は起らない。乱流を起す原因を初期擾乱（initial disturbance）とよんでいる。臨界 Reynolds 数と，初期擾乱とが，乱流発生を特ちょうずけるパラメターである。

乱流の機構は次の三段階に分けて考えるのが，実験的にも，理論的にも考えやすい。すなわち

1）初期段階（initial stage）実験的には，線スペクトルの擾乱が観察される。

2）遷移領域（transition regime）擾乱が線スペクトルから連続スペクトルに変化する。

3）十分発達した乱流（fully developed turbulence）連続スペクトル

ル。

初期段階における理論は如何なる条件のもとに層流中の初期擾乱が増大するか，すなわち，層流の不安定性の問題である。これについて，線形および非線形理論がある。前者では，平面流の場合，Squire の定理[1] と線形方程式のかさね合せの原理から，初期擾乱として二次元擾乱の一 Fourier 成分だけとり出し，それについての不安定の条件をしらべればよい。非線形理論では，事情はもっと複雑で，次の三つの非線形作用が考えられる。

a) 平均流と擾乱との相互作用： 方程式の平均をとった時に，一般に自乗平均の項がのこる。非線形理論ではこれらの項をのこすので擾乱の平均流への反作用が現れる。

b) 三次元性： 非線形理論では Squire の定理が成立たず，三次元性を考慮する必要がある。実験的にも三次元的擾乱が存在する。

c) 波と波との間の相互作用： N-S 方程式の波数空間表示において，非線形項は波と波との間の相互作用を表わしている。

a) については Meksyn-Stuart の理論があり，この論文では，もっぱらこの非線形性を論ずる。b) については Benny & Lin の理論がある。著者の意見では，三次元性は乱流エネルギーの平等分配と考えられる。すなわち，まず二次元擾乱が生じ，第三成分には乱流エネルギー 0 の状態が生ずる。これは非常に不平等なエネルギー分配なので，その平均流に特有な乱流エネルギー分配になるまで第三成分へ，他の二成分から乱流エネルギーが供給されると考えるのである。c) は Meksyn-

Stuartの理論において展開されている。

§2. 基礎方程式

我々は準二次元の流れ，すなわち，空間座標およびそれらのベクトル成分は二成分以下の場合について考える。座標およびベクトル成分を

	二次元	軸対称
座標	(x, y, z)	(x, r, ϕ) $(r \equiv y)$
速度ベクトル	$(u, v, 0)$	$(u, v, 0)$
渦度ベクトル	$(0, 0, \omega)$	$(0, 0, \omega)$

と表わす。連続の方程式，渦度の方程式（N-S方程式に対応）および渦度の式は次のようになる。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + y^{-s}\frac{\partial}{\partial y}y^{s}v = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u\frac{\partial \omega}{\partial x} + v y^{s}\frac{\partial}{\partial y}(y^{-s}\omega) = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + y^{-s}\vartheta y^{s}\right)\omega \tag{2.2}$$

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.3}$$

但し
$$\vartheta = y^{s}\frac{\partial}{\partial y}y^{-s}\frac{\partial}{\partial y}$$

ここで二次元流に対し $s=0$，軸対称流に対し $s=1$ である。(x, y)，(u, v) はそれぞれ代表的な長さ L，速さ U で，時間 t，ω は L/U，U/L でそれぞれ規格化してある。$R = UL/\nu$（ν 動粘性率）はReynolds数である。

我々は平行流の不安定性のみを考え，x 軸を平均流（平行流）の方向にとる。速度と渦度をまず平均流（$\bar{\ }$ つき）と乱れ成分（$\tilde{\ }$ つき）に分ける：

$$\left.\begin{array}{ll} u=\bar{u}(y)+\tilde{u}(x,y,t), & v=\tilde{v}(x,y,t) \\ \omega=\bar{\omega}(y)+\tilde{\omega}(x,y,t) & \end{array}\right\} \quad (2.4)$$

(2.1) − (2.3) を時間平均したものと，それらをさし引いたものとに分けると

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}+y^{-s}\frac{\partial}{\partial y}(y^s\tilde{v})=0 \qquad (2.1')$$

$$\vartheta\{y^s(\bar{u}'-R\overline{\tilde{u}\tilde{v}})\}=0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\tilde{\omega}-(\vartheta\bar{u})\tilde{v}-\frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+y^{-s}\vartheta\, y^s\cdot\right)\tilde{\omega} \qquad (2.2a)$$

$$=-\frac{\partial}{\partial x}(\tilde{u}\tilde{\omega})-\frac{\partial}{\partial y}(\tilde{v}\tilde{\omega}-\overline{\tilde{v}\tilde{\omega}}) \qquad (2.2b)$$

$$\bar{\omega}=-\bar{u}'(y), \qquad \tilde{\omega}=\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}-\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y} \qquad (2.3')$$

となる。非線形性は (2.2a), (2.2b) に現われている。(2.2a) は Reynolds 応力による平均流に対する擾乱の反作用を表わす式である。(2.2b) において，左辺は擾乱を表わす量について線形，右辺は二次である。左辺は初項から順に，渦度の平均流による対流，渦度と平均流との相互作用，および渦度の散逸を表わす項から出来ており，右辺は二つの波の相互作用を表わすと考えられる。

ここで擾乱に対する流れの関数 $\psi(x,y,t)$：

$$\tilde{u}=y^{-s}\frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad \tilde{v}=-y^{-s}\frac{\partial\psi}{\partial x} \qquad (2.5)$$

を導入する。Meksyn-Stuart にしたがって，ψ 等を Fourier 級数に展開する。これは一つの近似である。

$$\left.\begin{array}{l} \psi=\phi_1(y)e^{i\alpha(x-ct)}+\phi_2(y)e^{2i\alpha(x-ct)}+\cdots+c.c. \\ \tilde{u}=y^{-s}[\phi_1'e^{i\alpha(x-ct)}+\phi_2'e^{2i\alpha(x-ct)}+\cdots+c.c.] \\ \tilde{v}=-i\alpha y^{-s}[\phi_1e^{i\alpha(x-ct)}+2\phi_2e^{2i\alpha(x-ct)}+\cdots-c.c.] \end{array}\right\} \quad (2.6)$$

$$\tilde{\omega} = -y^{-s}\left[e^{i\alpha(x-ct)}(\vartheta-\alpha^2)\phi_1 + e^{2i\alpha(x-ct)}(\vartheta-4\alpha^2)\phi_2 + \quad + c.c\right]\Big)$$

こゝで α, c はFourierの基本波の波数，位相速度， c.c. はそれより前にある式の複素共役を表わす。 これらを (2.2b) に代入すると

$$(\bar{u}-c)(\vartheta-\alpha^2)\phi_1 - (\vartheta\bar{u})\phi_1 - \frac{1}{i\alpha R}(\vartheta-\alpha^2)^2\phi_1 = -y^{-s}\{\phi_1'^*$$
$$(\vartheta^2-4\alpha^2)\phi_2 + \phi_2'(\vartheta-\alpha^2)\phi_1^*\} + \frac{\partial}{\partial y}y^{-s}\{\phi_1'^*(\vartheta-4\alpha^2)\phi_2$$
$$-2\phi_2(\vartheta-\alpha^2)\phi_1\} + \qquad (2.7)$$
$$(\bar{u}-c)(\vartheta-4\alpha^2)\phi_2 - (\vartheta\bar{u})\phi_2 - \frac{1}{2i\alpha R}(\vartheta-4\alpha^2)^2\phi_2$$
$$= -y^{-s}\{\phi_1(\vartheta-\alpha^2)\phi_1 + \cdots\} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\{\phi_1(\vartheta-\alpha^2)\phi_1 + \cdots\} + \qquad (2.8)$$

等がえられる。

さて、こゝで非線形項をすべて落してしまうと (2.1), (2.7), (2.8) は

$$\vartheta(y^s\bar{u}') = 0 \qquad (2.9)$$

$$(\bar{u}-c)(\vartheta-\alpha^2)\phi - (\vartheta\bar{u})\phi = \frac{1}{i\alpha R}(\vartheta-\alpha^2)^2\phi \qquad (2.10)$$

となる。 (2.7), (2.8) 等は同形の方程式となる。 (2.9) を解いて $\bar{u}$ を求め、(2.10) に代入すると，いわゆる Orr-Sommerfeld の方程式をうる。 (2.10) の左辺第一項は平均流による対流項であり，右辺は粘性による散逸項であり，エネルギー的に考えれば，両者は乱流を増大させる作用はないと考えられる。 左辺第二項は平均流と撹乱との相互作用を表わし，不安定性に対し重大な効果をもつと考えられよう。 この項の係数 $\vartheta\bar{u}$ について二、三の例についてしらべてみる。

i) 平面Couette 流 $\quad \bar{u} = y \quad (-1 \le y \le 1) \quad \vartheta\bar{u} = 0$

ii) 平面Poiseuille流 $\quad u = 1-y^2 \; (-1 \le y \le 1) \quad \vartheta\bar{u} = -2$

iii) Rayleigh 流　$\bar{u} = \mathrm{erfc}\, y \quad (y \geq 0)$　$\vartheta\bar{u} = \frac{4y}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2}$

iv) H-P 流　$\bar{u} = 1 - z^2 \quad (0 \leq z \leq 1)$　$\vartheta\bar{u} = 0$

v) 軸対称ジェット　$\bar{u} = \frac{1}{(1+r^2)^2} \quad (r \geq 0)$　$\vartheta\bar{u} = \frac{24 r^2}{(1+r^2)^4}$

平面 Couette 流と，H-P 流については，線形不安定理論では不安定解がえられないことがわかっている。この二つの流れの場合に丁度この項が0になることは，この項の不安定性に対する重要性を暗示しているように思われる。そこで，この二つの流れに対しては，平均流に対する擾乱の非線形反作用が本質的重要性をもっていると考えられる。

さて，準二次元の流れでは，非線形性は前に述べたように，平均流に対する擾乱の反作用と，higher harmonics の発生との二つである。十分初期の段階では，第一高調波だけが存在し，又上に強調したように，平均流に対する擾乱の反作用が重要であることにより，第二高調波以上を省略する近似を考えてみよう。こゝで

$$\varphi = \sqrt{\alpha R}\, \phi_1$$

とおく。このような近似では，(2.2a)，(2.7) より

$$\bar{u} = A_2 y^2 + A_1 \delta_{s0}\, y + A_0 - i \int y^{-s} (\varphi, \varphi')\, dy \qquad (2.12)$$

$$(\bar{u} - c)(\vartheta - \alpha^2)\phi - (\vartheta\bar{u})\phi = \frac{1}{i\alpha R}(\vartheta - \alpha^2)^2 \phi \qquad (2.13)$$

をうる。こゝで

$$(\varphi, \varphi') = \varphi\varphi'^* - \varphi^*\varphi'$$

である。これらは $\bar{u}$，φ に対する連立の非線形常微分方程式である。

境界条件は次のようになる。固体壁あるいは無限遠で

$$\varphi = \varphi' = 0 \quad , \quad u = U_0 \qquad (2.14)$$

ここで U_0 は固体壁あるいは無限遠での速度である。軸対称流では、中心での条件が必要な場合があり

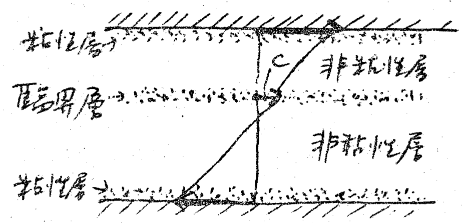
$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}\varphi=0,\quad \lim_{r\to 0}\frac{1}{r}\left(\varphi''-\frac{1}{r}\varphi'\right)=0 \qquad (2.15)$$

となる。前者は v が、後者は接線応力 τ_{xr} が0になることである。

§3. 平面Couette流とHagen-Poiseuille流に対する非線形不安定性

線形理論によっては、不安定解のない平面Couette流（C-流）とH-P流に対しては§2で考察したように、擾乱の平均流への反作用が重大な影響をもつと考えられる。Meksyn-Stuartがやったような線形理論の摂動として、非線形性をあつかう方法は、その中立解が存在しないから、この場合適用できない。

つぎに、αR が大きいとして、うすい臨界層あるいは粘性層とひろい非粘性層に分けられると仮定しよう（第1図）。この場合には、二種の領域で各々粘性層の解と漸近解をつくり、これらの解をつなぎ合わせて境界条件を合わせる方法が考えられる。C-流について、この方法では必要な境界条件を満足する中立解はえられなかった。非粘性解による平均流への反作用を計算すると、直線の速度分布がえられ、反作用がないのと同じであり、粘性層においてのみ直線分布からはずれることになる。上の方法においては、平均流への反作用、したがって不安定を起す要因がうすい粘性



第1図 平面Couette流における一つのモデル

層にのみ限られるため，十分不安定を起すにいたらないものと考えられる。

以上の考察から我々は，全巾にわたって粘性の効果がしみわたっていると考えてよかろう。　このような状況のもとでは，φは局所的に急激に変化するものでなく十分なめらかな関数とみなしてよい。　そこで，流れの全域（C-流に対しては$[-1,1]$，H-P流に対しては$[0,1]$）を関数領域にもつ適当な直交関数系をえらべば，φは十分よく近似できるものと考えられる。　我々は

$$\varphi=\sum a_n \varphi_n(y) \tag{3.1}$$

とおく。　a_nは複素数の定数，φ_nは実関数である。　さて，我々は，各関数φ_nに対して次のような条件をつける。

1) 境界条件を満足する

$$\left.\begin{aligned} s=0:&\quad \varphi_n(\pm 1)=\varphi_n'(\pm 1)=0 \\ s=1:&\quad \varphi_n(1)=\varphi_n'(1)=0 \\ &\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}\varphi_n(r)=\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}\left(\varphi_n''-\frac{1}{r}\varphi_n'\right)=0 \end{aligned}\right\} \tag{3.2a}$$

2) 壁における撹動切線応力 τ_{xy} は 0 にならない

$$\left.\begin{aligned} s=0 &: \varphi_n''(\pm 1)\neq 0 \\ s=1 &: \varphi_n''(1)\neq 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.2b}$$

3) H-P流の場合には，中心で撹動軸速度は0にならない。

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}\varphi_n'(r)\neq 0 \tag{3.2c}$$

このような条件を満足する直交関数は，C-流ではLegendreの陪多項式 $P^4_{n+4}(y)$，すなわち

$$\varphi_0=(1-y^2)^2,\quad \varphi_1=(1-y^2)^2y,\quad \varphi_3=(1-y^2)^2(11y^2-1)\ \mathrm{etc} \tag{3.4}$$

H-P流に対してはJacobの多項式 $G_n(7,3,r^2)$，すなわち（$y=1-r^2$とおく）

$$\varphi_0=r^2(1-r^2)^2=y^2(1-y),\quad \varphi_1=r^2(1-r^2)(3-8r^2)=-y^2(1-y)(5-8y)$$
$$\varphi_2=r^2(1-r^2)^2(1-6r^2+\frac{15}{2}r^4)=\frac{1}{2}y^2(1-y)(5-8y+15y^2)\ \mathrm{etc.} \tag{3.5}$$

をえらべばよい。

をえらべばよい。

次に中立安定の解をもとめよう。φを上のようにしてえらんだ直交関数で展開すれば，境界条件はすでに満足されている。次は基礎方程式を満足するように展開係数をきめなければならない。それらを決めるのに二つの方法がある。一つは方程式をその領域の一部で局所的に満足させる方法であり，他は領域全体にわたって，平均的に満足させる方法である。

まず平均流を計算しよう。我々はφが十分なめらかとし，展開の第二項までとる。そうすると，C-流（$s=0$），H-P流（$s=1$）についておのおの

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{u}=y+a f(y),\quad a=i(a_0,a_1)\\
&f=-\left(\frac{187}{5\cdot7\cdot9}-\frac{4}{3}y^2+\frac{6}{5}y^4-\frac{4}{7}y^6+\frac{1}{9}y^8\right)\quad s=0\\
&f=\frac{4}{3\cdot5\cdot7}[4-7(6-5y)y^4]y\quad (y=1-r^2)\quad s=1
\end{aligned}\right\}\tag{3.6}$$

をうる。

φを展開第二項までとり，(3·6)を代入すると(2·13)は次のようになる。

$$\mathfrak{L}\varphi = a_0 \mathfrak{L}\varphi_0 + a_1 \mathfrak{L}\varphi_1 = 0 \qquad (3.7)$$

$$\mathfrak{L} \equiv (y + af - c)(\vartheta - \alpha^2) - a\vartheta f - \frac{1}{i\alpha R}(\vartheta^2 - 2\alpha^2\vartheta + \alpha^4) \qquad (3.8)$$

こゝで、$s=1$ において $y=1-r^2$ の変換を行ったものとすると

$$\left.\begin{aligned} \vartheta &= \frac{d^2}{dy^2} & s&=0 \\ \vartheta &= 4(1-y)\frac{d^2}{dy^2} & s&=1 \end{aligned}\right\} \qquad (3.9)$$

の意味である。

我々は $\langle f \rangle$ を

$$\left.\begin{aligned} \langle f \rangle &= \int_{-1}^{1} f\,dy & s&=0 \\ \langle f \rangle &= \int_{0}^{1} f\,dy & s&=1 \end{aligned}\right\} \qquad (3.10)$$

のように定義する。Galerkin の方法によって，係数をきめることにしよう。(3.7) に φ_0 および φ_1 をかけ，各を全域にわたって積分すると

$$\left.\begin{aligned} \langle \varphi_0 \mathfrak{L} \varphi_0 \rangle a_0 + \langle \varphi_0 \mathfrak{L} \varphi_1 \rangle a_1 &= 0 \\ \langle \varphi_1 \mathfrak{L} \varphi_0 \rangle a_0 + \langle \varphi_1 \mathfrak{L} \varphi_1 \rangle a_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3.11)$$

をうる。これらの方程式は $\mathfrak{L}$ の中に a_0, a_1 をふくむため一次方程式ではないが，上の式に現れる a_0, a_1 をまず消去し

$$\begin{vmatrix} \langle \varphi_0 \mathfrak{L} \varphi_0 \rangle & \langle \varphi_0 \mathfrak{L} \varphi_1 \rangle \\ \langle \varphi_1 \mathfrak{L} \varphi_0 \rangle & \langle \varphi_1 \mathfrak{L} \varphi_1 \rangle \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.12)$$

をうる。こゝで

$$\langle \varphi_k \mathfrak{L} \varphi_j \rangle = a_{jk} - c\,b_{jk} + c_{jk} - \frac{1}{i\alpha R} d_{jk} \qquad j, k = 0, 1 \qquad (3.13)$$

とかかれ，

$$\left.\begin{aligned} a_{jk} &= \langle \varphi_j f \vartheta \varphi_k \rangle - \langle \varphi_j (\vartheta f) \varphi_k \rangle - \alpha^2 \langle \varphi_j f \varphi_k \rangle \\ b_{jk} &= \langle \varphi_j \vartheta \varphi_k \rangle - \alpha^2 \langle \varphi_j \varphi_k \rangle \\ c_{jk} &= \langle \varphi_j y \vartheta \varphi_k \rangle - \alpha^2 \langle \varphi_j y \varphi_k \rangle \\ d_{jk} &= \langle \varphi_j \vartheta^2 \varphi_k \rangle - 2\alpha^2 \langle \varphi_j \vartheta \varphi_k \rangle + \alpha^4 \langle \varphi_j \varphi_k \rangle \end{aligned}\right\} \quad (3.14)$$

である。　$a_{ij}, \cdots, d_{jk}$ に現れる〈　〉は実定数であり，したがってそれらはα^2だけの関数である。

(3.12) を線形理論の場合と同じく，特性方程式とよぼう。　線形理論との違いは，その中に撹乱の振巾 a をふくんでいることである。　そこで (3.12) は

$$F(\alpha, R, a, c) = 0 \quad (3.15)$$

の形にかける。　もっと具体的に，実数部と虚数部に分けて書けば

$$Aa - Bc + C = 0 \quad (3.16)$$

$$\frac{1}{2}[\{a,a\}B^2 - 2\{a,b\}AB + \{b,b\}A^2]a^2 - [\{a,b\}BC - \{b,b\}CA + \{b,c\}AB - \{c,a\}B^2]a + \frac{1}{2}[\{c,c\}B^2 - \{b,c\}BC + \frac{1}{2}\{b,b\}C^2 - \frac{1}{(\alpha R)^2}B^2 D] = 0 \quad (3.17)$$

となる。　ただし

$$\left.\begin{aligned} \{a,a\}(\alpha) &= \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} \\ b_{10} & b_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{00} & b_{01} \\ a_{10} & b_{11} \end{vmatrix} = a_{00}b_{11} + a_{11}b_{00} - a_{01}b_{10} - a_{10}b_{01} \\ &\qquad \text{etc.} \\ A(\alpha) &= \{a,d\}, \quad B(\alpha) = \{b,d\}, \quad C(\alpha) = \{c,d\}, \quad D(\alpha) = \{d,d\} \end{aligned}\right\} \quad (3.18)$$

で $\{a,a\}, \cdots, A, B, C, D$ はα^2だけの関数である。　(3.16), (3.19) より c を消去すれば，一般に α, R, a の関数 G

$$G(\alpha, R, a) = 0 \quad (3.18)$$

をうる。 aはその式の形から実数でなければならない。 (3·19) はaについて二次方程式であり，(α, R) をきめた場合その二つあるいは一つの実根が中立解を表すものと考えられる。 今 (α, R, a) の三次元空間を考えれば中立解は一つの曲面でなければならない。 一つの実根は，中立解があるかないかを表わす (α, R) 面における境界である。 我々はこの曲面を"中立曲面"，この曲線を"中立曲線"とよぼう。 中立曲線は (3·19) の等根，すなわち判別式を0とおいてえられ，C-流 $(s=0)$ H-P 流 $(s=1)$ について各々

$$R = 7.02997\,\frac{\sqrt{(\alpha^2+0.719043)(\alpha^2-9.33739)(\alpha^4+6\alpha^2+31.5)(\alpha^4+22\alpha^2+247.5)}}{\alpha(\alpha^2-108.854107)} \qquad (s=0) \qquad (3.19)$$

$$\left.\begin{aligned}
R &= 211.8798\sqrt{J_1 J_2/(\bar{\alpha}^2 J_0)} \qquad \bar{\alpha}=\alpha/10\\
J_0 &= -\bar{\alpha}^{20}-2.3946666\bar{\alpha}^{18}-2.2124444\alpha^{16}-0.53979591\alpha^{14}\\
&\quad +0.68868710\bar{\alpha}^{12}+0.57925386\bar{\alpha}^{10}+0.14376370\bar{\alpha}^{8}\\
&\quad -0.011912878\bar{\alpha}^{6}-0.0084071719\bar{\alpha}^{4}-0.00021999407\bar{\alpha}^{2}\\
&\quad +0.00014294409\\
J_1 &= \bar{\alpha}^{16}+2.3016486\bar{\alpha}^{14}+2.7028169\bar{\alpha}^{12}+1.8445491\bar{\alpha}^{10}\\
&\quad +0.77288948\bar{\alpha}^{8}+0.17438359\bar{\alpha}^{6}+0.013477614\bar{\alpha}^{4}\\
&\quad -0.0016373684\bar{\alpha}^{4}-0.00024585671\\
J_2 &= \bar{\alpha}^{8}+1.408\bar{\alpha}^{6}+1.1904\bar{\alpha}^{4}+0.3096576\bar{\alpha}^{2}\\
&\quad +0.037158912
\end{aligned}\right\} \quad (s=1) \quad (3.20)$$

がえられる。 これらは第3，4図に示してある。

中立曲面を

$$
\left.\begin{aligned}
&G(\alpha, R, E) = 0 \\
&E = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2)\, dy \qquad s=0 \\
&E = \pi \int_{0}^{1} (\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2)\, r\, dr \qquad s=1
\end{aligned}\right\} \qquad (3.21)
$$

の形に表わされるが，もっと物理的にはっきりするであろう。ここでEは攪乱のエネルギーの空間平均である。中立曲面はC−流について大体第2図のようになり，その$R=const.$における断面は第5図に示されている。H−流についてはまだ計算が完了していない。

臨界Reynolds数 R_{cr}，その状態での波数 α_{cr} は次のようになる。

$$
\left.\begin{aligned}
R_{cr} &= 45,212 \\
\alpha_{cr} &= 13,565
\end{aligned}\right\} \quad s=0 \qquad (3.22)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
R_{cr} &\doteqdot 655 \\
\alpha_{cr} &\doteqdot 5.8
\end{aligned}\right\} \quad s=1 \qquad (3.23)
$$

ここでC−流については，半巾，相対速度の半分，H−P流については直径と平均速度によってReynolds数がつくられている。

§4. むすび

この論文では，流体力学における不安定性の非線形問題について述べたが，著者のあつかった場合に限られている。Meksyn & Stuart[7]，Stuart[9]，Watson[11]，Gotoh[4] Benny & Lin[1-3] 等のあることを附記しておこう。

ここで行われた近似法において省略された項は，higher harmonics

と higher modes $\varphi_2, \varphi_3, \cdots$, である。 前者は振巾の大きいところで，後者は R が大きい所できくと思われる。

この解析では αR が非常に大きいという結果がえられた。 それ故うすい粘性層を仮定する方がよさそうに思われる。 しかし，その場合には，$d^4\varphi/dy^4$ が大きいことが仮定されている。 我々の場合には，α が10程度になり，d^4/dx^4 の項からでてくる α^4 の項が $d^4\varphi/dy^4$ の項にくらべてずっと大きい効果をもち，事情はことなっている。 線形理論の場合に α が小さいことは，平均流の方向の長い渦の存在を表し，我々の場合に α が大いことは，流れに垂直な方向の長い渦の存在を表す。 すなわち後者では，流れに垂直な方向の mixing がきわだっていることを示している。

H-P 流について，$e^{i\theta}$ に比例する（θ は方位角）軸対称でない擾乱が軸対称の擾乱より不安定である可能性がある。 これに対する解析も将来，やる必要があると思われる。

C-流，H-P 流においては，擾乱の平均流に対する反作用が不安定性に重大な効果をもち，以上の解析がその本質を十分つかんでいると考えられる。

参考文献：

1) Benny, D. J. : JFM 10 (1961) 209

2) Benny, D. J. : Phys. Fl. 7 (1964) 319.

3) Benny, D. J. & C. C. Lin : Phys. Fl. 3 (1960) 656.

4) Gotoh, K. : 物理学会分科会(応用力学)予稿集 (1963)

5) Lin, C. C. : Hydrodynamic stability, Cambr. Univ. Press

6) Lin, C. C. : Boundary Layer Res. Symp. (1957, Freiburg) ed. by H. Görtler, 144-60.

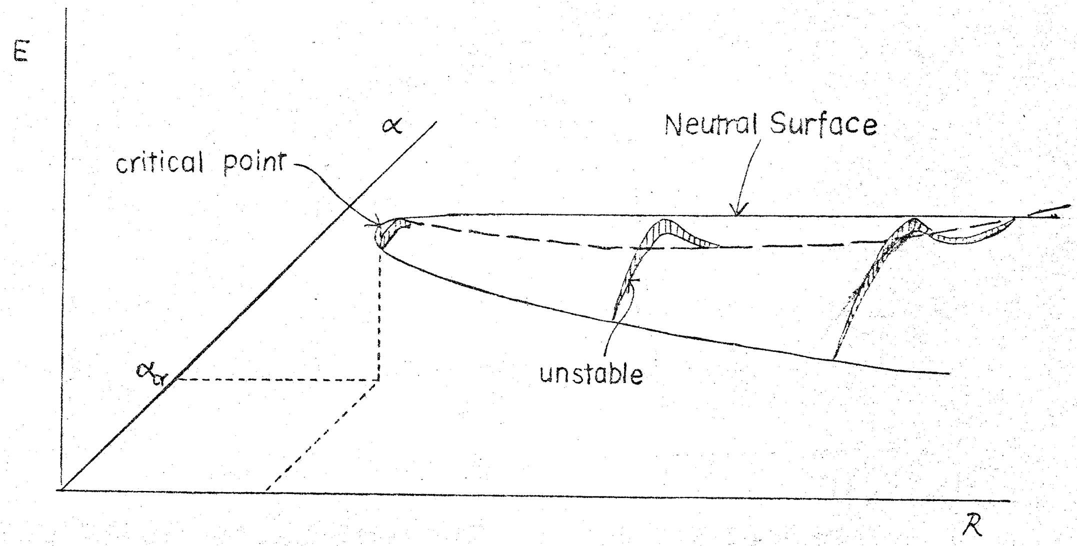
7) Meksyn, D. & J. T. Stuart : Proc. Roy. Soc. A 208 (1951) 517-26.

8) Schada, H. : Phys. Fl. 7 (1964) 623.

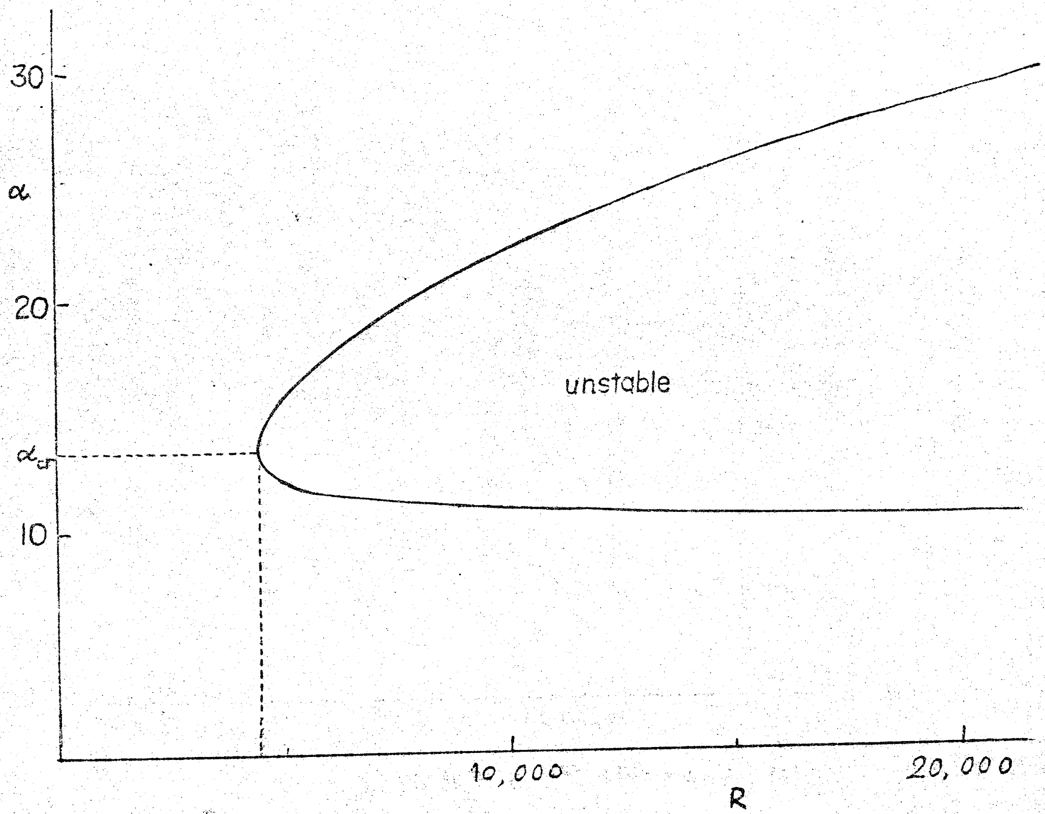
9) Stuart, J. T. : JFM 9 (1960) 353.

10) Stuart, J. T. : Applied Mechanics, Proc. 10th Congr. of Appl. Mech. (1960, Stresa) ed. by Rolla, F. & W. T. Koiter, 63

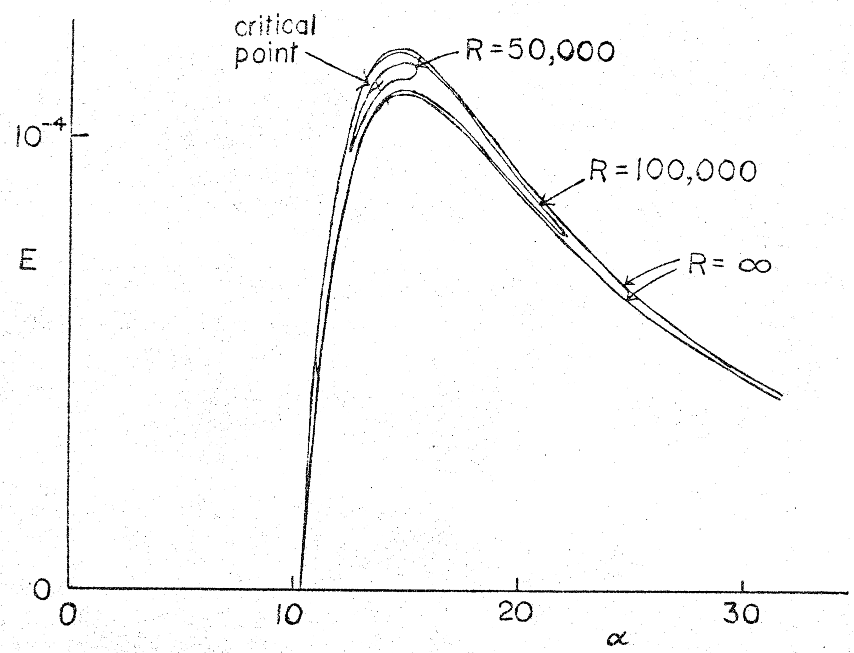
11) Watson, J. : JFM 9 (1960) 371.



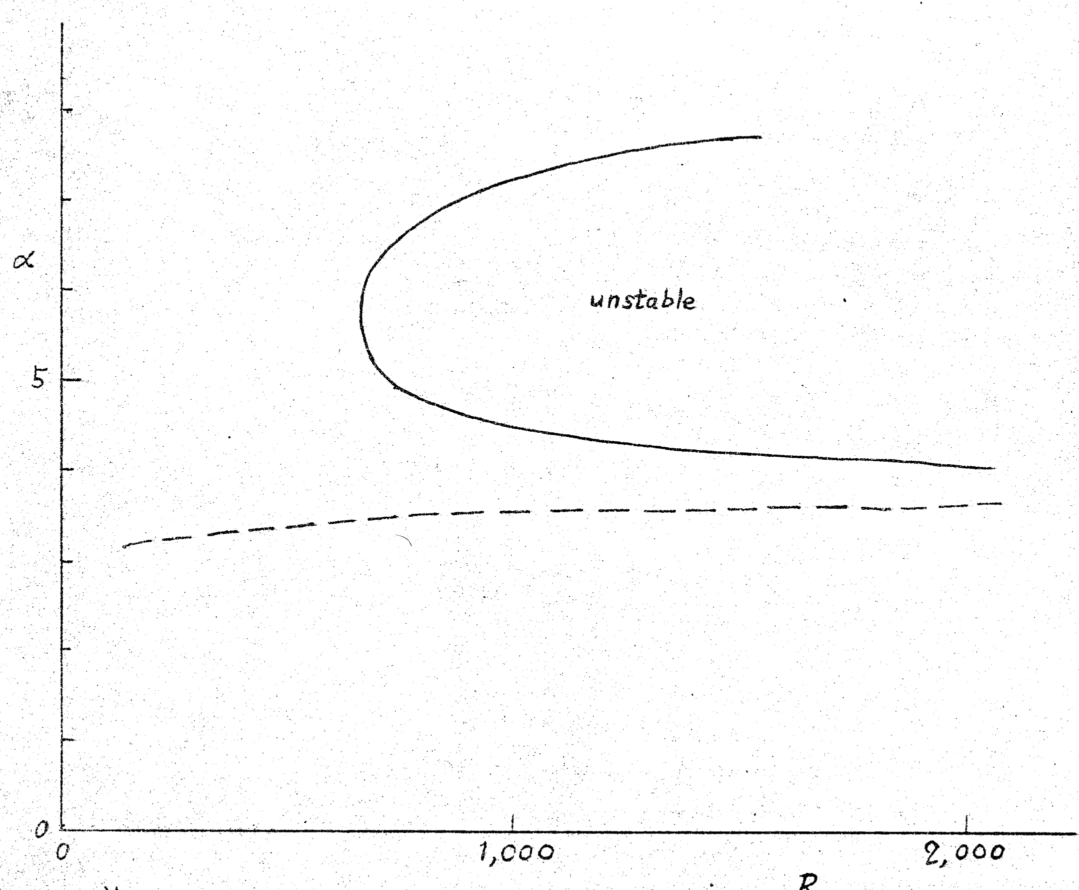
第2図　中立曲面（平面 Couette 流）



第3図　平面 Couette 流の中立曲線



才5図　中立曲面の断面（平面Couette流）



才4図　Hagen-Poiseuille流の中立曲線